CH12

靜力平衡

目錄

- **靜力平衡**（static equilibrium）：一個結構物或系統沒有受到任何淨力與淨力矩的作用。
- 工程師通常利用靜力平衡的原理來設計建築物、橋樑以及飛機。科學家則將此平衡原理應用到各種尺度的問題上，從分子到天文物理。

12.1 平衡的條件

◆ 當一個物體所受的外在淨力與淨力矩為零時，它就處在**平衡**（equilibrium）的狀態。

◆ 令所有的外力與外力矩皆為零，靜力平衡的條件如下：

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0} \qquad (12.1)$$

與

$$\sum \vec{\tau}_i = \sum (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \vec{0} \qquad (12.2)$$

在此下標 i 標示作用於物體的力 $\vec{F}$，施力點的位置向量 $\vec{r}$，以及伴隨的力矩 $\vec{\tau}$。

例題 12.1　選擇支點：吊橋

圖 12.1a 顯示被拉起之吊橋，其質量為 11,000 kg，均勻分布在 14 m 的長度上。求支撐鋼纜的張力。

解答

12.2 重心

◆ 圖 12.2 顯示要計算伴隨質量單元之力矩式 $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ 所需的要素，將所有質量單元的力矩相加可得：

$$\vec{\tau} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{g} = \left(\sum m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{g}$$

我們可將此方程式右側乘上 M/M，這裡 M 為物體的總質量：

$$\vec{\tau} = \left(\frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \right) \times M\vec{g}$$

一般來說，重力作用於物體的作用點稱為**重心**（center of gravity）。我們剛剛也證明了一個重要的概論點：**當重力場**（gravitational field）**均勻時，重心與質心重合**。

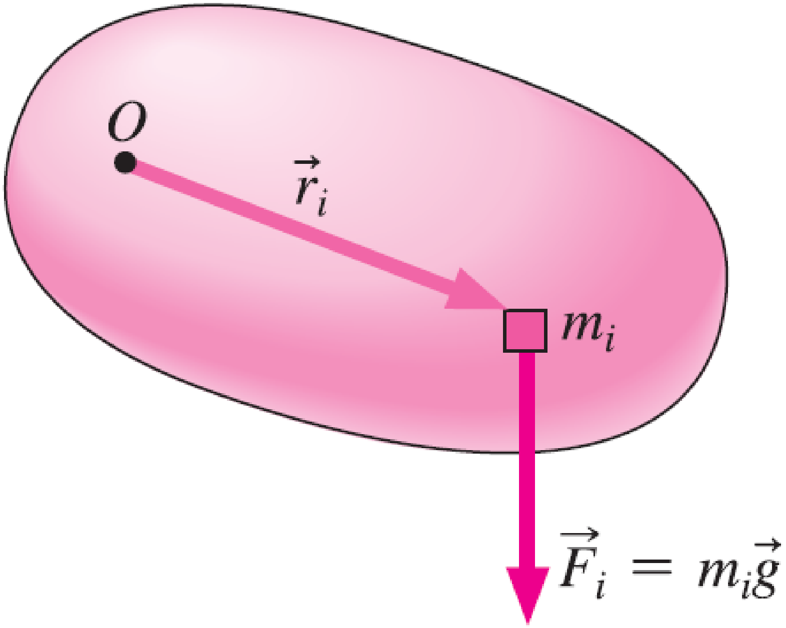

圖 12.2　作用於質量單元 m_i 的重力 $\vec{F}_i$ 對於 O 點產生力矩。

觀念題 12.1　找出重心

說明如何藉著將物體以繩子懸吊起來即可找出它的重心？

解答

12.3 靜力平衡的例子

- 作用於物體的力處在同一個平面是相當常見的情形，因此方程式12.1中靜力平衡時沒有淨力的條件可以分解成力之兩個分量方程式。又當所有的作用力共平面時，所有的力矩皆與平面垂直，因此方程式12.2 中淨力矩為零的敘述變成單一方程式。

解題策略 12.1　靜力平衡的問題

題意：瞭解問題以確定其為靜力平衡問題，確定要保持平衡的物體，然後找出所有作用於在該物體上的力。

思考：首先畫出作用於物體的所有力。由於要計算力矩，所以標出施力點的位置是重要的，因此不要將物體簡化成一個點，而需要將物體的形狀大致畫出來並標示出力的作用點。這裡要處理的是靜力平衡問題，故我們要使用方程式 $\Sigma \vec{F}_i = \vec{0}$ (12.1) 與 $\Sigma \vec{\tau}_i = \vec{0}$ (12.2)。挑選合適的坐標系以便將力分解為分量的形式，將坐標的原點設在適當的支點上，通常是其中一個作用力的施力點。在某些問題中，力本身為未知量。在此情形下，你可以畫出你認為合適的向量，然後從代數運算來算出實際的方向與角度。

解答

例題 12.2　靜力平衡：梯子的安全性

質量與長度分別為 m 與 L 的梯子靠在牆壁上，如圖 12.4a 所示。如果梯子與牆壁間沒有摩擦力，梯子與地面的靜摩擦係數為 μ，求梯子不會滑下來之最小角度 ϕ。

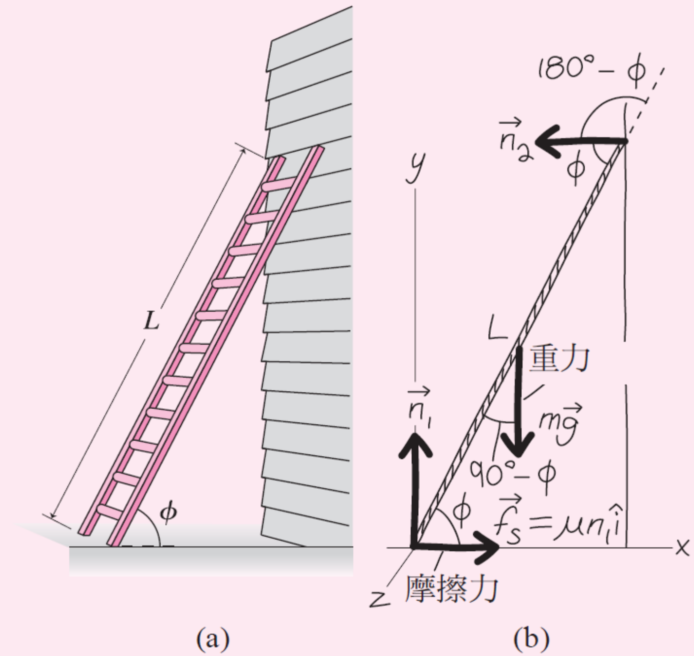

圖 12.4　(a) 在什麼角度梯子會下滑？ (b) 簡圖。

解答

例題 12.3　靜力平衡：人體之內

圖 12.5a 為舉著南瓜的手臂，圖中標示出已知的質量與長度，求出二頭肌的張力與手肘關節接觸力的大小。

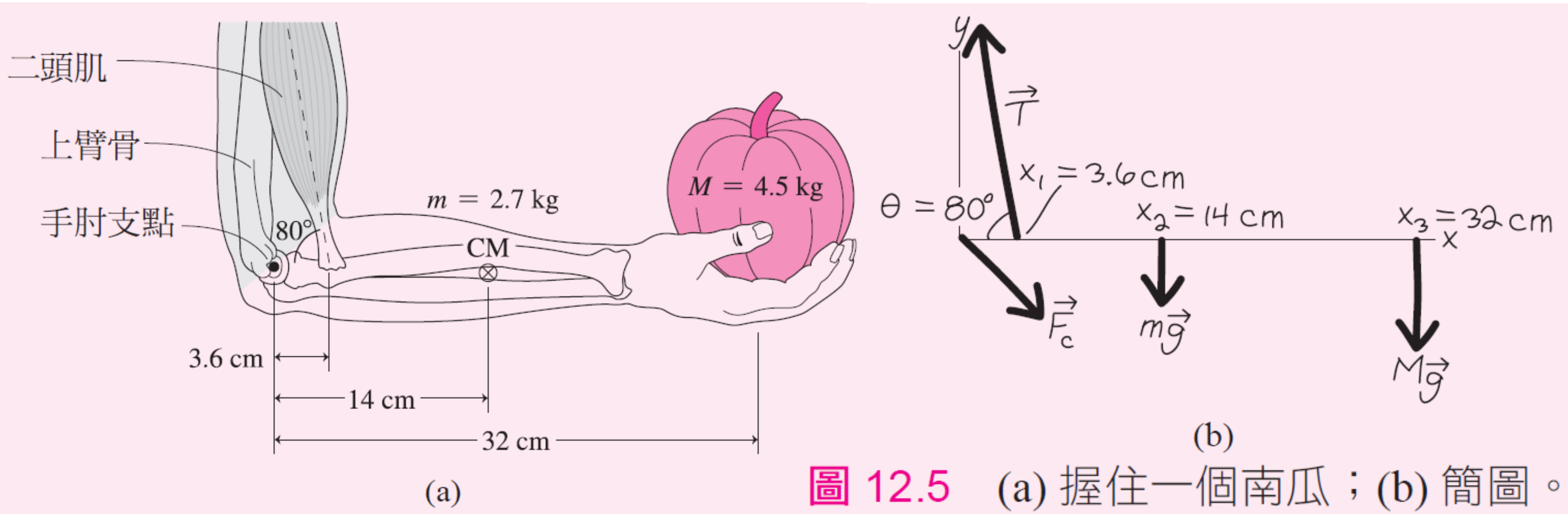

圖 12.5　(a) 握住一個南瓜；(b) 簡圖。

解答

12.4 穩定性

◆ 這兩個情形，前者為**穩定平衡**（stable equilibrium）的例子，後者則為**不穩定平衡**（unstable equilibrium）。我們在自然界中所碰到各種平衡態幾乎都是穩定的，因為物體處於不穩定平衡不會一直保持該狀態，僅需一點點的微擾便會造成它的運動，使物體處於完全不同的平衡態。

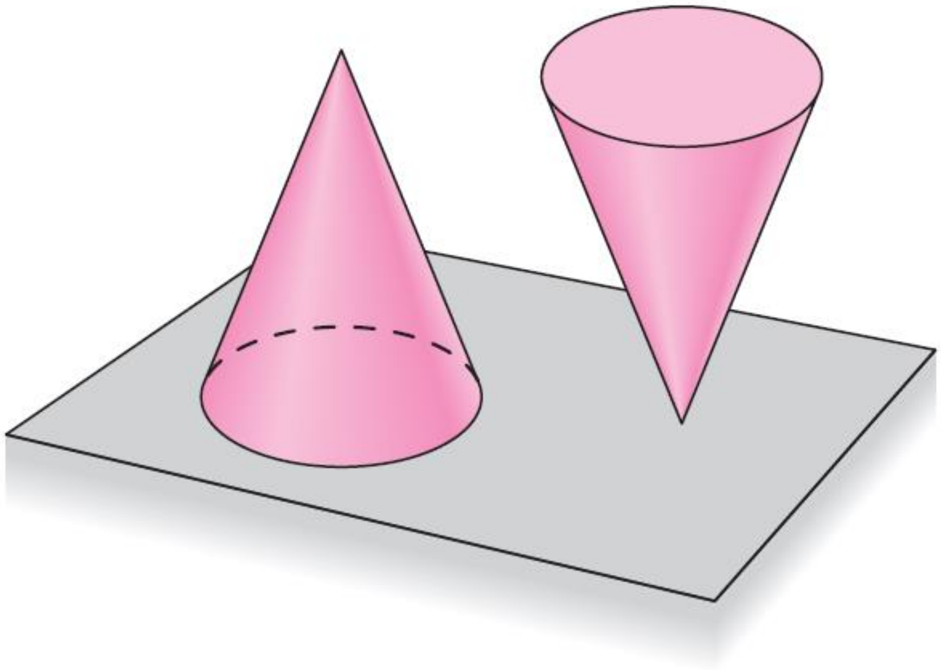

圖 12.6　穩定（左）與不穩定（右）平衡。

12.4 穩定性

- 圖 12.7 顯示一個處於四種不同平衡態的球，很明顯 (a) 是穩定的，而 (b) 是不穩定的。狀態 (c) 既非穩定也非不穩定，因此稱為**中性穩定**（neutrally stable）。那麼 (d) 呢？對小的擾動來說，球會回到原本的狀態，此時的平衡是穩定的。但對較大的擾動而言 ，也就是大到可以將球推過兩側的最高點，則為不穩定，這種平衡是**有條件的穩定** (conditionally stable），或稱為**準穩定**（metastable）。

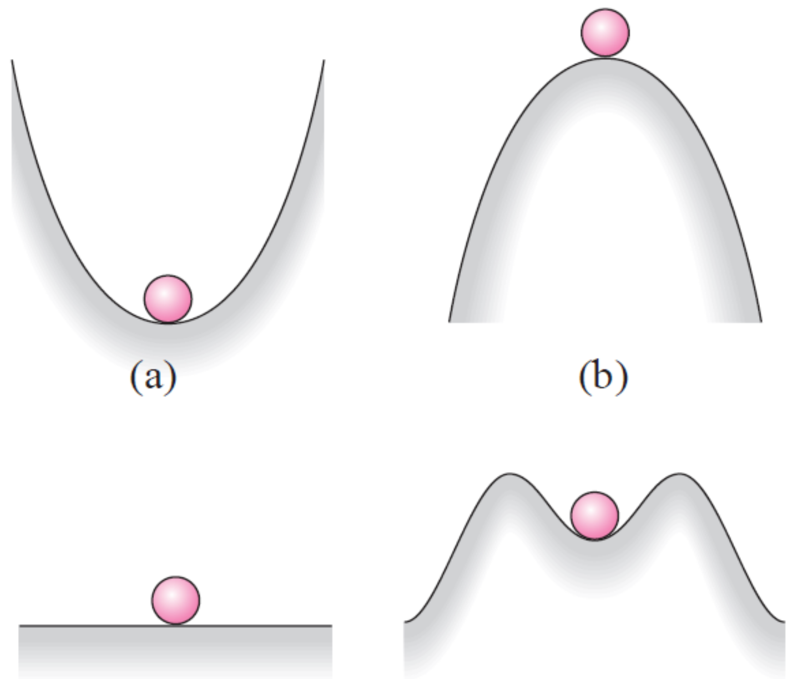

圖 12.7 (a) 穩定；(b) 不穩定；(c) 中性穩定；(d) 準穩定平衡。

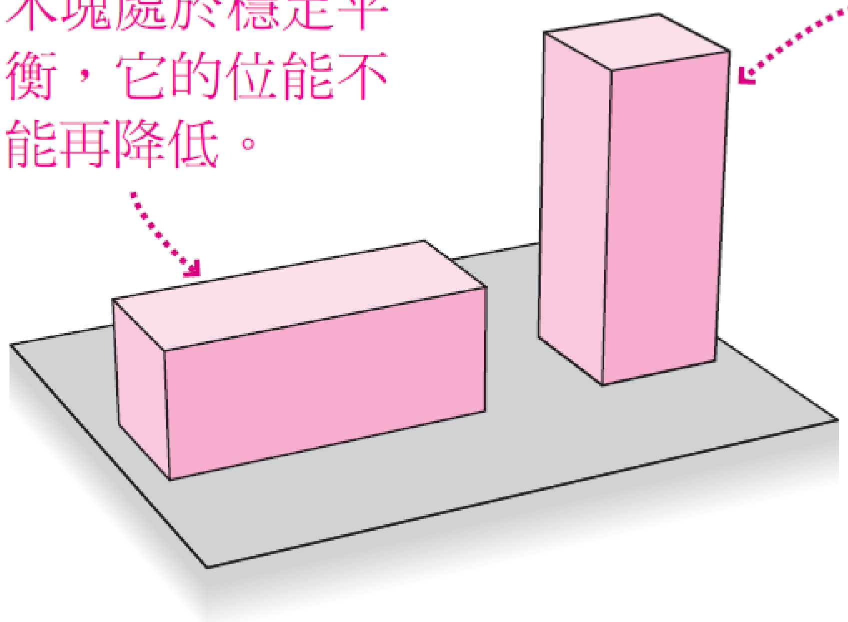

圖 12.8　相同的木塊處於穩定與準穩定平衡。

12.4 穩定性

◆我們可以用兩個簡單的數學敘述來對平衡態與位能的關係做個總結。首先，物體的受力必為零，這就要求位能為局部極大或極小值：

$$\frac{dU}{dx} = 0 \qquad \text{（平衡條件）} \qquad (12.3)$$

12.4 穩定性

◆ 對於穩定平衡，我們要求位能函數有局部極小值，因此位能曲線開口向上。數學上表示成

$$\frac{d^2U}{dx^2} > 0 \qquad \text{（穩定平衡）} \qquad (12.4)$$

此條件也適用於準穩定平衡，因為它也具有局部穩定性。相反地，不穩定平衡發生在位能有局部極大值之處，亦即

$$\frac{d^2U}{dx^2} < 0 \qquad \text{（不穩定平衡）} \qquad (12.5)$$

而介於中間的情形 $d^2U/dx^2 = 0$，則對應到中性平衡。

解題技巧 12.1　找出極大與極小值

- 1. 首先畫出函數的圖形，這可以對你的數值答案提供一個視覺上的檢驗。
- 2. 計算函數的一次導數並令其為零。如圖 12.7 所示，高峰（極大值）或山谷（極小值）所在位置為水平。因此若將一次導數設為零，你要求斜率為零，也就是要求函數為極大或極小值。

解題技巧 12.1　找出極大與極小值(續)

- 3. 在一次導數為零的點求函數之二次導數的正負值，你所畫的簡圖亦會顯示其正負值的幾何特性。如果函數曲線開口向上，如圖 12.7a 與 d 所示，該點之二次導數為正，則該點為極小值。若函數曲線開口向下，如圖 12.7b 所示，d^2U/dx^2 為負，則你得到極大值。若函數圖形不易畫出，你可以直接計算二次導數在平衡點的正負值來做判斷。
- 4. 檢查你計算之極大或極小值是否與你所畫之函數圖形相符合。

例題 12.4　穩定性分析：半導體工程

物理學家研發出一個新的半導體元件，其中電子的位能函數為 $U(x) = ax^2 - bx^4$。這裡 x 是電子的位置，單位為 nm，位能 U 的單位為 aJ（10^{-18} J），常數 a 與 b 的值分別為 8 aJ/nm^2 與 1 aJ/nm^4。求電子的平衡位置，並說明其穩定性。

解答

12.4 穩定性

- 一個位於山隘的雪球或任何其它具有較形位能的系統，就某一方向來說是穩定的，但其它方向卻不穩定，如圖 2.10 所示。複雜物理系統之穩定性分析，其範圍涉及原子核與分子，橋樑、建築物與機械裝置，甚至包括恆星與星系，是當今工程與科學研究工作的重要課題。

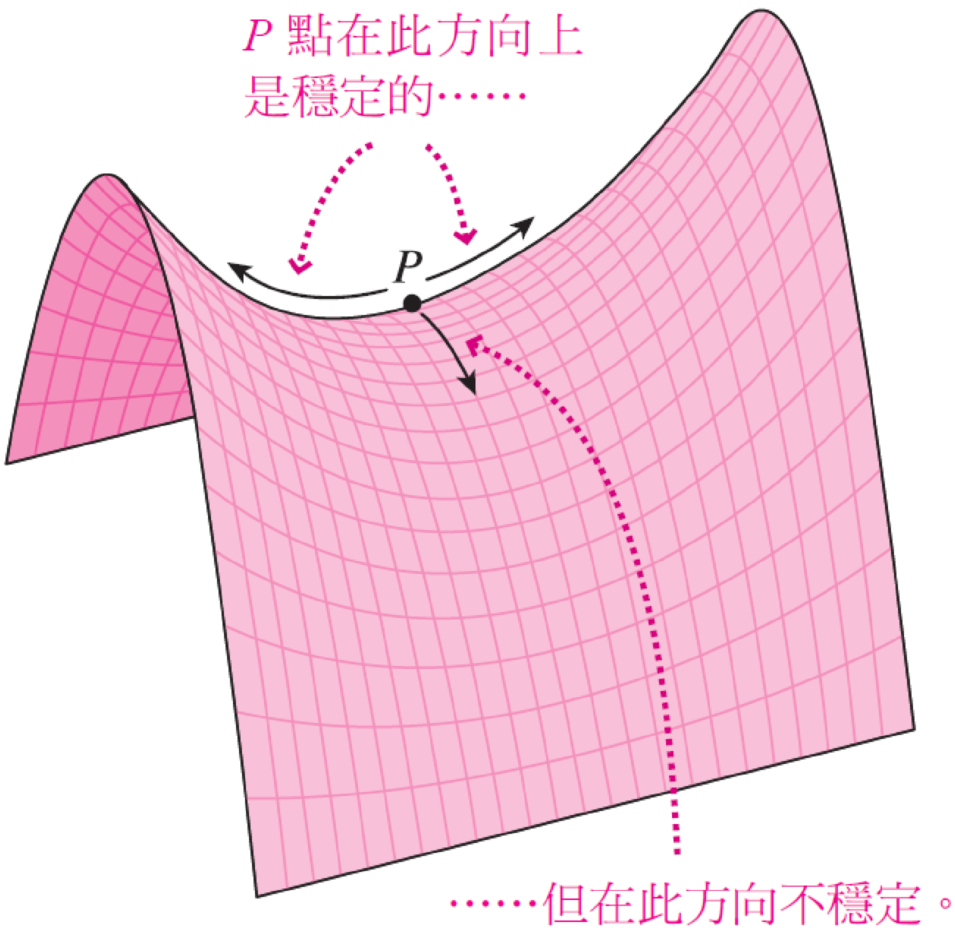

圖 2.10　鞍形位能曲線的平衡。