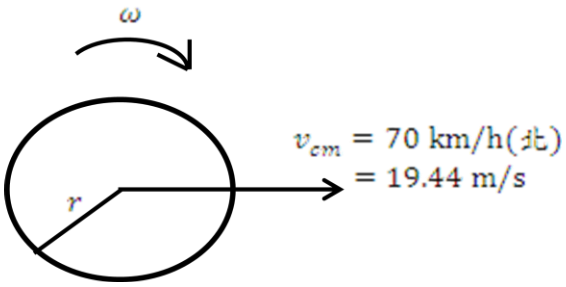
第 11 章 轉動向量與角動量(習題詳解)

10. 一部車以 70 km/h 的速度朝北行駛。如果車子的輪胎直徑為 62 cm，則車輪角速度的大小與方向各為何？

解:

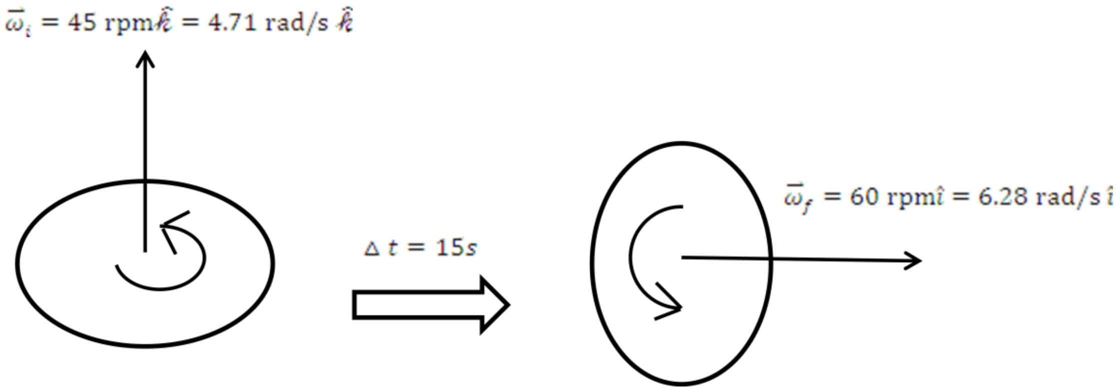


$$\omega = \frac{v_{cm}}{r} = \frac{19.44}{0.31}\ \text{rad/s} \approx 63\text{rad/s}$$

右手定則指出$\vec{\omega}$方向垂直進入平面，也就是指向西。

12. 某輪子以 45 rpm 的轉速繞垂直轉軸旋轉，在 15 s 後轉軸改為水平，輪子則以 60 rpm 的角速率轉動，求 (a) 輪子之平均角加速度的大小，(b) 平均角加速度向量與水平軸之夾角。

解:

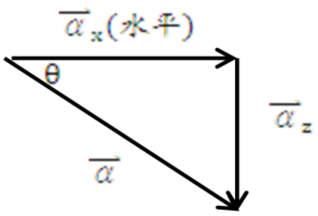


(a)

$$\overline{\vec{\alpha}} = \frac{\vec{\omega}_f - \vec{\omega}_i}{\Delta t} = \frac{6.28\,\hat{\imath} - 4.71\,\hat{\imath}}{15}\ \text{rad/s}^2 = (0.419\,\hat{\imath} - 0.314\hat{k})\ \text{rad/s}^2$$

$$\therefore \alpha = \sqrt{\alpha_x{}^2 + \alpha_z{}^2} = \sqrt{0.419^2 + (-0.314)^2}\ \text{rad/s}^2 = 0.52\text{rad/s}^2$$

(b)



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha_z}{\alpha_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-0.314}{0.419}\right) \approx -37°$$

13. 12 N 的力作用在位於 $x = 3$ m，$y = 1$ m 的點上，如果作用力分別沿著 (a) x 方向，(b) y 方向，(c) z 方向，則其相對於原點的力矩各為何？

解:

$$\vec{r} = (3\hat{\imath} + \hat{\jmath})\mathrm{m}$$

(a)

$$\vec{F} = 12\hat{\imath}\ \mathrm{N}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = (3\hat{\imath} + \hat{\jmath}) \times 12\hat{\imath}\ \mathrm{N \cdot m} = -12\hat{k}\ \mathrm{N \cdot m}$$

(b)

$$\vec{F} = 12\hat{\jmath}\ \mathrm{N}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = (3\hat{\imath} + \hat{\jmath}) \times 12\hat{\jmath}\ \mathrm{N \cdot m} = 36\hat{k}\ \mathrm{N \cdot m}$$

(c)

$$\vec{F} = 12\hat{k}\ \mathrm{N}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = (3\hat{\imath} + \hat{\jmath}) \times 12\hat{k}\ \mathrm{N \cdot m} = (12\hat{\imath} - 36\hat{\jmath})\ \mathrm{N \cdot m}$$

14. 力 $\vec{F} = 1.3\hat{i} + 2.7\hat{j}$ N 作用在 $x = 3.0$ m，$y = 0$ m 的點上，求其對 (a) 原點，(b) 點 $x = -1.3$m，$y = 2.4$ m 的力矩。

解:

$$\vec{F} = 1.3\hat{\imath} + 2.7\hat{\jmath}\ \mathrm{N}$$

(a)

$$\vec{r} = 3.0\hat{\imath}\ \mathrm{m}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 3.0\hat{\imath} \times (1.3\hat{\imath} + 2.7\hat{\jmath})\mathrm{N \cdot m} = 8.1\hat{k}\ \mathrm{N \cdot m}$$

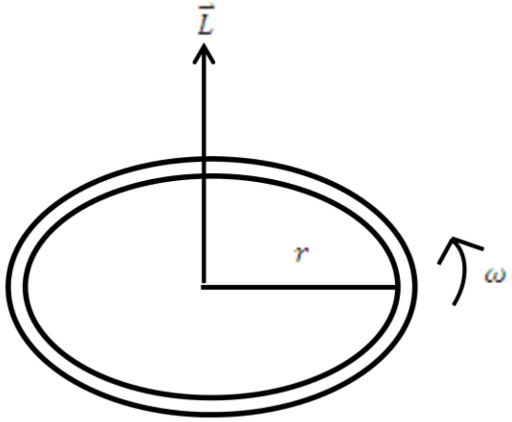
(b)

$$\vec{r} = [3.0 - (-1.3)]\hat{\imath} + (0 - 2.4)\hat{\jmath}\ \mathrm{m} = 4.3\hat{\imath} - 2.4\hat{\jmath}\ \mathrm{m}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = (4.3\hat{\imath} - 2.4\hat{\jmath}) \times (1.3\hat{\imath} + 2.7\hat{\jmath})\mathrm{N \cdot m} = 15\hat{k}\ \mathrm{N \cdot m}$$

16. 直徑與質量分別為 90 cm 與 640 g 的圓環對中心軸以 170 rpm 的轉速旋轉，則其角動量為何？

解:



$\vec{L} = I\vec{\omega}$ ，$\omega = 170\ \mathrm{rpm} = 17.8\ \mathrm{rad/s}$

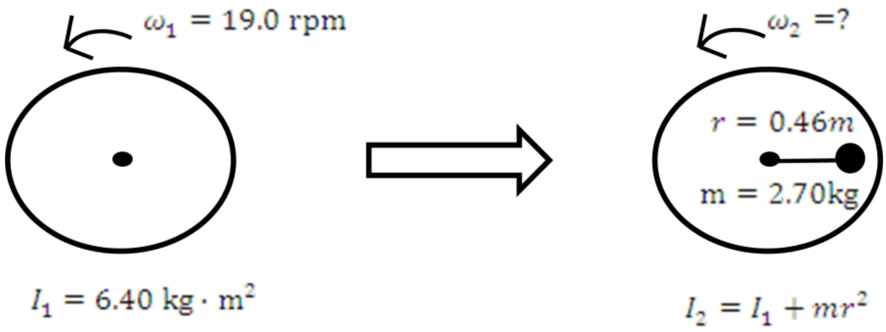
$L = (mr^2)\omega$

$= 0.640 \times (0.45)^2 \times 17.8\ \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$

$= 2.3\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$

18. 製陶轉盤的轉動慣量為 6.40 kg•m^2，以 19.0 rpm 的轉速自由旋轉。陶藝家將質量 2.70 kg 的黏土放在轉盤上距離轉軸 46.0 cm 的地方，則轉盤的角速率會變成多少。

解:



$$I_2 = I_1 + mr^2 = (6.40 + 2.70 \times 0.46^2)\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 = 6.97\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$$

角動量守恆: $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

$$\omega_2 = \frac{I_1\omega_1}{I_2} = \frac{6.40\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \times 19.0\ \mathrm{rpm}}{6.97\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2} = 17.4\ \mathrm{rpm}$$

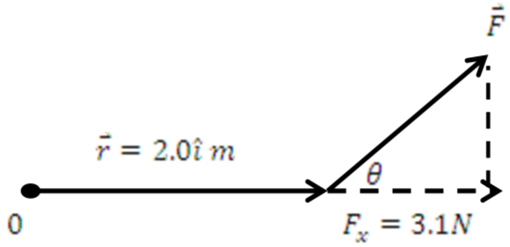
19. 你將板手卡緊螺絲。如果取螺絲為坐標的原點，板手的另一端點位在 $x = 18$ cm，$y = 5.5$ cm 處，你對板手末端施予一個作用力 $\vec{F} = 88\hat{i} - 23\hat{j}$ N，則螺絲所受之力矩為何？

解:

$$\vec{r} = 0.18\hat{\imath} + 0.055\hat{\jmath}\ \mathrm{m}，\vec{F} = 88\hat{\imath} - 23\hat{\jmath}\ \mathrm{N}$$
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = (0.18\hat{\imath} + 0.055\hat{\jmath}) \times (88\hat{\imath} - 23\hat{\jmath})\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$$
$$= (-0.18 \times 23 - 0.055 \times 88)\hat{k}\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m} = -9.0\hat{k}\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$$

27. 某力矩作用在點 $x = 2.0$ m，$y = 0$ m 上，相對於原點產生 $4.6\hat{k}$ N•m 的力矩，如果 $\vec{F}$ 的 x 分量為 3.1 N，則 $\vec{F}$ 與 x 軸的夾角為何？

解:



$$\vec{\tau} = 4.6\hat{k}\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$$
可知$\vec{F}$在xy平面上
$$\tau = rF\sin\theta --- (1)$$
$$F_x = F\cos\theta --- (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} => \frac{\tau}{F_x} = r\tan\theta => \ \theta = \tan^{-1}\frac{\tau}{rF_x} = \tan^{-1}\frac{4.6}{2.0 \times 3.1} \approx 37^\circ$$

30. 在圖 11.14 中，下方圓盤的質量與半徑分別為 440 g 與 3.5 cm，以 180 rpm 的轉速相對於不計摩擦力且軸半徑可忽略的長軸轉動。而上方圓盤的質量與半徑分別為 270 g 與半徑 2.3 cm，一開始靜止不動。如果它自由下落至下方的圓盤上，摩擦力使兩圓盤具有相同的轉動速率，求 (a) 該轉動速率，(b) 初始動能因摩擦力而損耗的比例。

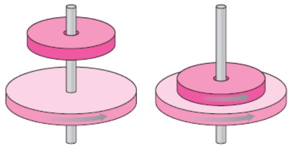


圖 11.14 應用題 30。

解:

上圓盤轉動慣量$I_1 = \frac{1}{2} m_1 {r_1}^2$

下圓盤轉動慣量$I_2 = \frac{1}{2} m_2 {r_2}^2$

(a)

初狀態 $I_i = I_2$，$\omega_i = 180\text{ rpm}$

末狀態$I_f = I_1 + I_2$，$\omega_f = ?$

角動量守恆 $I_i\omega_i = I_f\omega_f$

$$\omega_f = \frac{I_i\omega_i}{I_f} = \frac{m_2{r_2}^2\omega_i}{m_1{r_1}^2 + m_2{r_2}^2}$$

$$= \frac{440\text{g} \times (3.5\text{cm})^2 \times 180\text{ rpm}}{270\text{g} \times (2.3\text{cm})^2 + 440\text{g} \times (3.5\text{cm})^2} = 142\text{ rpm} \approx 140\text{ rpm}$$

(b)

初動能$K_i = \frac{1}{2} I_i{\omega_i}^2$

末動能$K_f = \frac{1}{2} I_f{\omega_f}^2$

動能損失比例:

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = 1 - \frac{K_f}{K_i} = 1 - \frac{I_f{\omega_f}^2}{I_i{\omega_i}^2}$$

$$= 1 - \frac{I_f(\frac{I_i\omega_i}{I_f})^2}{I_i{\omega_i}^2} = 1 - \frac{I_i}{I_f}$$

$$= 1 - \frac{m_2{r_2}^2}{m_1{r_1}^2 + m_2{r_2}^2} = \frac{m_1{r_1}^2}{m_1{r_1}^2 + m_2{r_2}^2}$$

$$= \frac{270\text{g} \times (2.3\text{cm})^2}{270\text{g} \times (2.3\text{cm})^2 + 440\text{g} \times (3.5\text{cm})^2} \approx 21\%$$