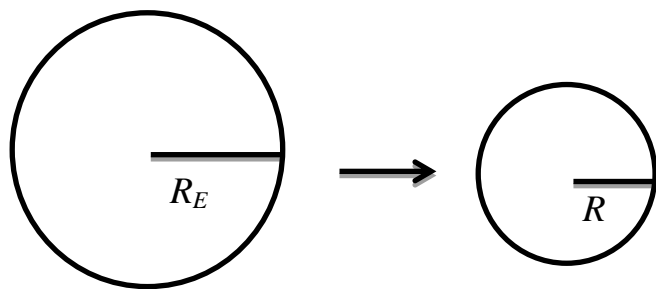


第8章 重力(習題詳解)

9.如果地球表面的重力加速度變成目前的三倍，在質量不變的條件下，地球的半徑要縮小為目前半徑的多少百分比？

解：



$$g = \frac{GM}{R_E^2}$$

$$g' = \frac{GM}{R^2}$$

$$g' = 3g \rightarrow \frac{GM}{R^2} = 3 \frac{GM}{R_E^2} \rightarrow \frac{R}{R_E} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 57.7\%$$

14. 某艘火箭從地面以 5.1 km/s 的速率垂直發射，求它可到達的最大高度。

解：

機械能守恆 $K_0 + U_0 = K + U$

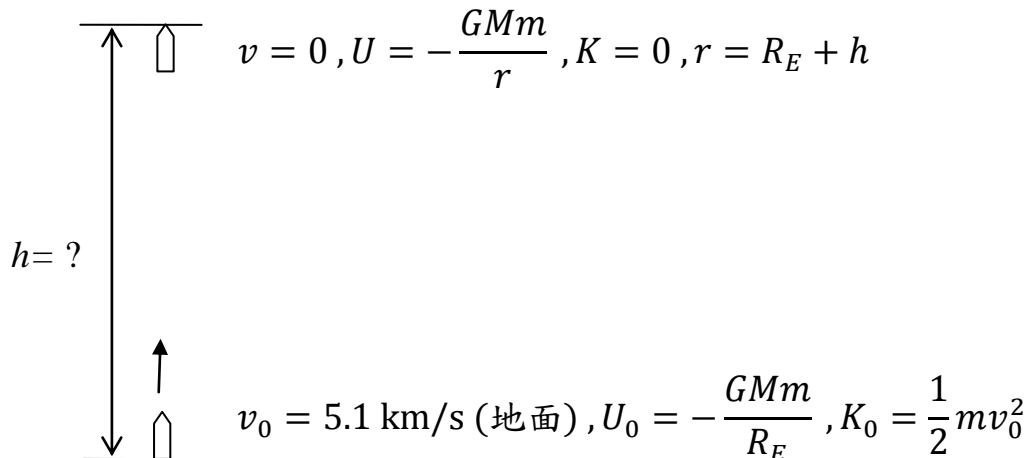
$$\rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R_E} = -\frac{GMm}{r}$$

$$\rightarrow r = \left(\frac{1}{R_E} - \frac{v_0^2}{2GM} \right)^{-1}$$

$$= \left[\frac{1}{6.37 \times 10^6} - \frac{5100^2}{2 \times (6.67 \times 10^{-11}) \times (5.97 \times 10^{24})} \right]^{-1} \text{ m}$$

$$= 8.04 \times 10^6 \text{ m}$$

$$h = r - R_E = (8.04 \times 10^6 - 6.37 \times 10^6) \text{ m} = 1.67 \times 10^6 \text{ m}$$



15. 如果要把靜止於地面上質量 1 kg 之物體送到同步軌道，則所需的能量應為何？

解：

質量 m 的物體靜止在地表上的機械能

$$E_0 = K_0 + U_0 = -\frac{GMm}{R_E}$$

質量 m 的物體在同步軌道上的機械能

$$E = K + U = -\frac{GMm}{2r} \quad (r \text{ 的值可參考例題 8.3})$$

所以送上軌道所需的能量

$$\begin{aligned} \Delta E &= E - E_0 = -\frac{GMm}{2r} - \left(-\frac{GMm}{R_E}\right) \\ &= GMm \frac{2r - R_E}{2R_E r} \\ &= (6.67 \times 10^{-11}) \times (5.97 \times 10^{24}) \times 1 \times \frac{2 \times (4.22 \times 10^7) - (6.37 \times 10^6)}{2 \times (6.37 \times 10^6) \times (4.22 \times 10^7)} \text{ J} \\ &= 5.8 \times 10^7 \text{ J} \approx 6 \times 10^7 \text{ J} \end{aligned}$$

17.某星球的表面重力加速度為 22.5 m/s^2 ，求距離表面為 $1/2$ 半徑高度的加速度。

解：

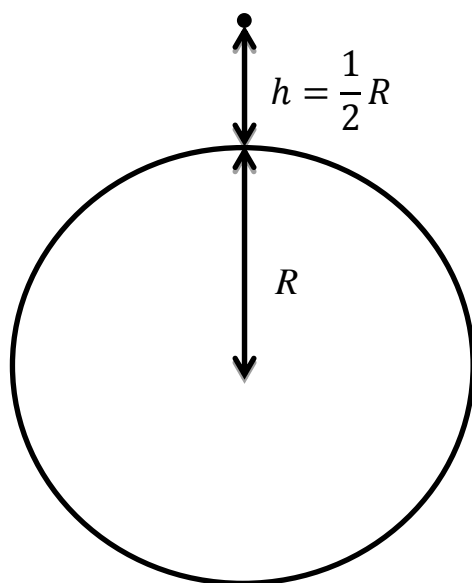
$$\text{表面 } g = \frac{GM}{R^2} = 22.5 \text{ m/s}^2$$

高度 h ：

$$g_h = \frac{GM}{r^2} = \frac{GM}{(R+h)^2} \quad , \quad h = \frac{1}{2}R$$

$$= \frac{4GM}{9R^2} = \frac{4}{9}g$$

$$= \frac{4}{9} \times 22.5 \text{ m/s}^2 = 10.0 \text{ m/s}^2$$



21.人造衛星 A 與 B 位於圓形軌道繞地球運轉，其中 A 與地心的距離為 B 的四倍，則人造衛星 A 與 B 的週期比為何？

解：

根據克卜勒第三定律 or 方程式(8-4)

$$T^2 \propto r^3$$

$$\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2 = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^3 = 2^3 \quad , \quad \text{所以} \quad \frac{T_B}{T_A} = 2^{3/2} \approx 2.83$$

25.考慮在圓形軌道上運轉，物體的速率需增加為原來的多少倍才能達到該軌道的脫離速率？

解：

在軌道上運動時，

$$m \frac{v_0^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r}} \text{ (原速率)}$$

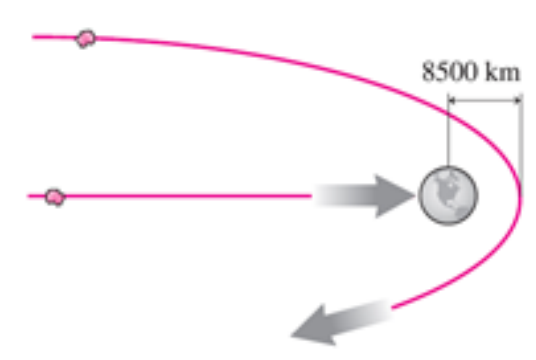
要脫離時，速率需增為 v ，使

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = 0 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \text{ (脫離速率)}$$

$$\text{所以 } \frac{v}{v_0} = \sqrt{2}$$

26. 兩個隕石以速率 2.1 km/s 移動，如果它們與地球中心的距離皆為 250,000 km，其中一個筆直朝向地球移動，另一個則沿著曲線軌跡移動，與地球最近的距離為 8500 km 如圖 8.16 所示。求 (a) 第一個隕石撞上地球時其速率，以及 (b) 第二個隕石最靠近地球時的速率，(c) 第二個隕石會再回到地球的附近嗎？

解：



根據機械能守恆

$$\text{(起始位置)} \quad \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \text{(後來的位置)}$$

$$\text{所以 } v = \sqrt{v_0^2 + 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$$

(a) 撞上地球，則 $r = R_E$ (地球半徑)

$$\begin{aligned} \text{所以 } v &= \sqrt{(2.1 \times 10^3)^2 - 2 \times (6.67 \times 10^{-11}) \times (5.97 \times 10^{24}) \times \left(\frac{1}{6.37 \times 10^6} - \frac{1}{2.5 \times 10^8}\right)} \text{ m/s} \\ &= 11.2 \times 10^3 \text{ m/s} = 11.2 \text{ km/s} \end{aligned}$$

(b) 近地點，則 $r = 8500 \text{ km}$

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{(2.1 \times 10^3)^2 - 2 \times (6.67 \times 10^{-11}) \times (5.97 \times 10^{24}) \times \left(\frac{1}{8.5 \times 10^6} - \frac{1}{2.5 \times 10^8}\right)} \text{ m/s} \\ &= 9.74 \times 10^3 \text{ m/s} = 9.74 \text{ km/s} \end{aligned}$$

(c) 在 $r_0 = 250000 \text{ km}$ 時，隕石所需之脫離速率

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} = \sqrt{\frac{2 \times (6.67 \times 10^{-11}) \times (5.97 \times 10^{24})}{2.5 \times 10^8}} \text{ m/s}$$
$$= 1.78 \times 10^3 \text{ m/s} = 1.78 \text{ km/s}$$

$$v_0 = 2.1 \text{ km/s} > v_{esc}$$

所以隕石最後會脫離，不再回地球。

30. 某飛彈飛行軌跡的最高點為 1200 km，如果其初速率為 6.1 km/s，則到達最高點的速率為何？

解：

在最高點 $r = R_E + h = 6.37 \times 10^6 \text{ m} + 1.20 \times 10^6 \text{ m} = 7.57 \times 10^6 \text{ m}$

$$v = ?$$

由機械能守恆

$$\text{(地面)} \quad \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R_E} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \quad \text{(最高點)}$$

所以達到最高點時的速率

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_0^2 - 2GM\left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{r}\right)} \\ &= \sqrt{(6.1 \times 10^3)^2 - 2 \times (6.67 \times 10^{-11}) \times (5.97 \times 10^{24}) \times \left(\frac{1}{6.37 \times 10^6} - \frac{1}{7.57 \times 10^6}\right)} \text{ m/s} \\ &= 4.17 \times 10^3 \text{ m/s} \\ &= 4.17 \text{ km/s} \end{aligned}$$