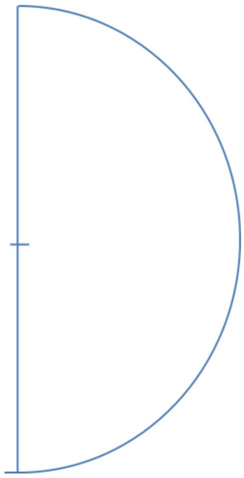
第三章 二維和三維運動(習題詳解)

5.有一個離子在質譜儀內沿著半徑為 15.2 cm 的半圓形路徑移動，則該離子之（a）移動距離，與（b）位移大小各為多少？

解:



r=15.2cm

（a）

移動距離=半圓弧長

$$= \pi r = \pi \times 15.2$$

$$= 47.8 \text{ cm}$$

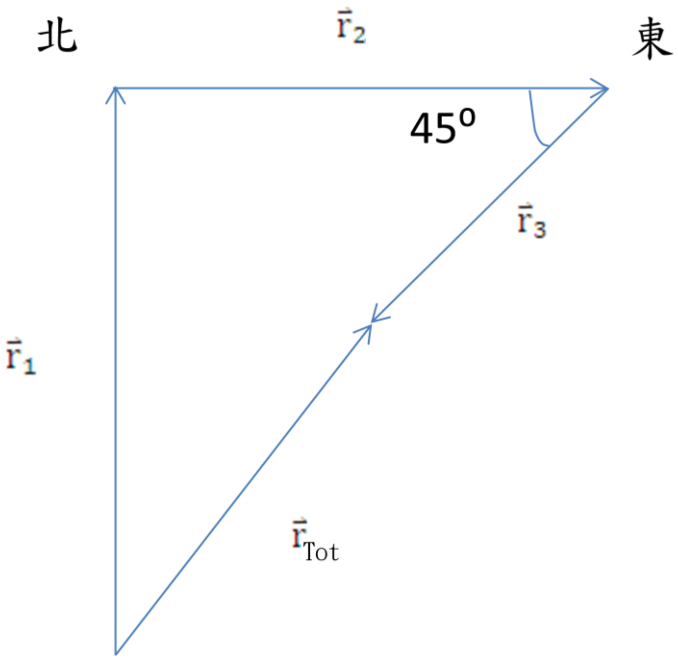
（b）

位移大小=直徑=$2r$

$$= 2 \times 15.2 = 30.4 \text{ cm}$$

9. 一輛汽車以 40 mi/h 的速率向北行駛 10 min，再轉向東方以 60 mi/h 的速率走了 5.0 mi，最後朝向西南方以 30 mi/h 的速率行駛 6.0 min，求該汽車在整個旅途的 (a) 位移，(b) 平均速度。

解:



(a)

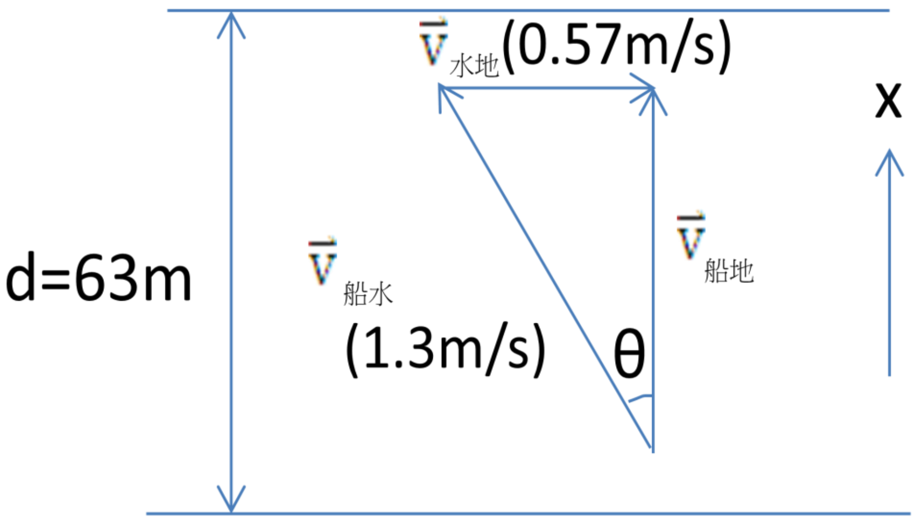
$$S = V \times t$$
$$40\ \text{mi/h} \times 10\ \text{min} = 6.67\ \text{mi}$$
$$\vec{r}_1 = 6.67\,\hat{j}\ \text{mi}$$
$$\vec{r}_2 = 5.0\,\hat{i}\ \text{mi}$$
$$30\ \text{mi/h} \times 6.0\ \text{min} = 3.0\ \text{mi}$$
$$\vec{r}_3 = -3.0\cos 45^\circ\,\hat{i} - 3.0\sin 45^\circ\,\hat{j}\ \text{mi}$$
$$= -2.12\,\hat{i} - 2.12\,\hat{j}\ \text{mi}$$
$$\vec{r}_{Tot} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3$$
$$= (6.67\,\hat{j}) + (5.0\,\hat{i}) + (-2.12\,\hat{i} - 2.12\,\hat{j})\ \text{mi}$$
$$= 2.88\,\hat{i} + 4.55\,\hat{j}\ \text{mi} \approx 2.9\,\hat{i} + 4.6\,\hat{j}\ \text{mi}$$

(b)

$$T = \frac{S}{V}\ ，\ t_2 = 5.0\ \text{mi}/(60\ \text{mi/h}) = 5\text{min}$$
$$\overline{\vec{V}} = \frac{\vec{r}_{Tot}}{t_{Tot}} = \frac{2.88\hat{i} + 4.55\hat{j}\ \text{mi}}{(10+5.0+6.0)\text{min}} \times \left(\frac{60\text{min}}{1\text{h}}\right)$$
$$= 8.2\,\hat{i} + 13\,\hat{j}\ \text{mi/h}$$

11. 如果你在船上想要直接划過 63 m 寬的河流，而且你能夠以相對於河水穩定划行 1.3 m/s 的速率，如果水流為 0.57 m/s， 試問：(a) 你應朝何方向划行？(b) 跨過河流所需的時間？

解:



(a)

$$\sin\theta = \frac{V_{水地}}{V_{船水}} = \frac{0.57}{1.3} \Rightarrow \theta = 26^{\circ}$$

(沿 x 軸偏左(上游方向) 26°)

(b)

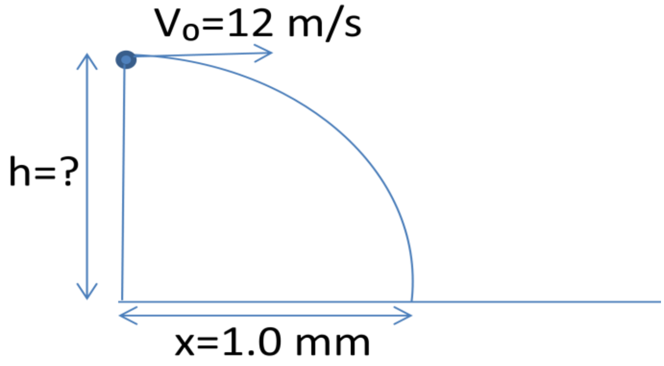
$$V_{船地} = \sqrt{{V_{船水}}^{2} - {V_{水地}}^{2}}$$

$$= \sqrt{1.3^{2} - 0.57^{2}} = 1.17\ \mathrm{m/s}$$

$$渡河時間 t = \frac{d}{V_{船地}} = \frac{63}{1.17} \approx 54\mathrm{s}$$

14. 噴墨印表機內的墨汁以 12 m/s 的速率水平噴出，它們在水平方向移動了 1.0 mm 後落在紙上，求在這時間間隔內墨汁落下的高度為何？

解:



$$x = V_0 t$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

$$1.0 \times 10^{-3}\mathrm{m} = 12\ \mathrm{m/s}\ \times \mathrm{t}$$

$$=> t = 8.33 \times 10^{-5}\mathrm{s}$$

$$h = y(t = 8.33 \times 10^{-5}\mathrm{s}) = \frac{1}{2} \times 9.8 \times (8.33 \times 10^{-5})^2$$

$$= 3.4 \times 10^{-8}\mathrm{m} = 34\ \mathrm{nm}$$

17. 請問汽車在半徑為 75 m 的彎道上需行駛多快才會使其加速度大小等於重力加速度？

解:

$$a = \frac{V^2}{r}$$

$$=> V = \sqrt{ar} = \sqrt{9.8 \times 75} = 27\ \mathrm{m/s}\ = 61\ \mathrm{mi/h}$$

19. 兩個向量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 大小相同且互相垂直，計算下列兩個運算的大小：(a) $\vec{A}+2\vec{B}$，(b) $3\vec{A}-\vec{B}$。

解:

$$令\vec{A} = A\,\hat{\imath} \quad , \quad \vec{B} = A\,\hat{\jmath}$$

(a)

$$\vec{A} + 2\vec{B} = A\,\hat{\imath} + 2A\,\hat{\jmath}$$

$$\left|\vec{A} + 2\vec{B}\right| = \sqrt{A^2 + (2A)^2} = \sqrt{5}A$$

(b)

$$3\vec{A} - \vec{B} = 3A\,\hat{\imath} - A\,\hat{\jmath}$$

$$\left|3\vec{A} - \vec{B}\right| = \sqrt{3A^2 + (-A)^2} = \sqrt{10}A$$

22. 有一物體以加速度 $2.3\hat{i}+3.6\hat{j}\ \mathrm{m/s^2}$ 移動了 10 s，其於10s末時的速度為 $33\hat{i}+15\hat{j}$ m/s，求 (a) 初速度為何？ (b) 速率變化量為多少？ (c) 方向變化為何？ (d) 證明速率變化量不等於加速度大小乘以時間。為什麼？

解:

(a)

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}-\vec{V_0}}{\Delta t}$$

$$\text{初速度}\vec{V_0} = \vec{V} - \bar{\vec{a}}\,\Delta t = (33\,\hat{\imath} + 15\,\hat{\jmath}) - (2.3\,\hat{\imath} + 3.6\,\hat{\jmath}) \times 10$$

$$= 10\,\hat{\imath} - 21\,\hat{\jmath}\ \mathrm{m/s}$$

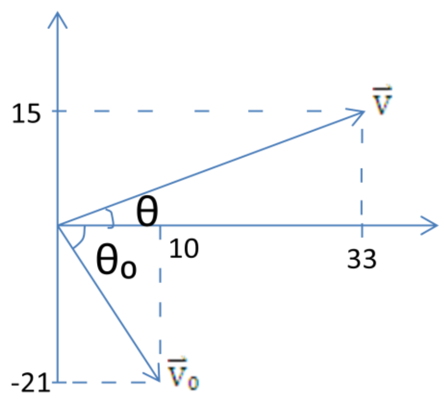
(b)

$$V_0 = \sqrt{10^2 + (-21)^2} = 23.26\ \mathrm{m/s}$$

$$V = \sqrt{33^2 + 15^2} = 36.25\ \mathrm{m/s}$$

速度變化量 $V - V_0 = 36.25 - 23.26 \approx 13\ \mathrm{m/s}$

(c)



$$\theta_0 = \tan^{-1}\left(\frac{-21}{10}\right) = -64.5^\circ$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{15}{33}\right) = 24.4^\circ$$

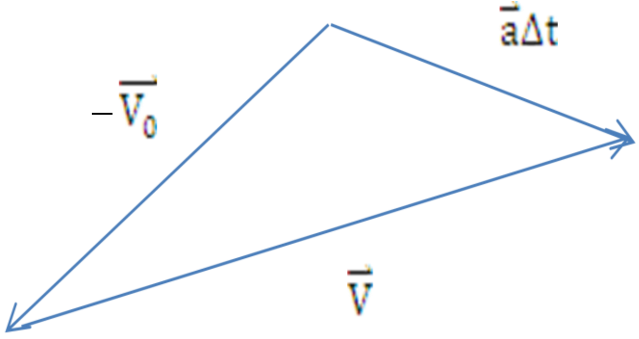
方向變化

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0 = 24.4^\circ - (-64.5^\circ) \approx 89^\circ$$

（d）

$$\bar{a} = \sqrt{2.3^2 + 3.6^2} = 4.27\ m/s^2$$

$$\bar{a}\Delta t = 4.27 \times 10 = 42.7\ m/s \neq \Delta V = 13\ m/s$$

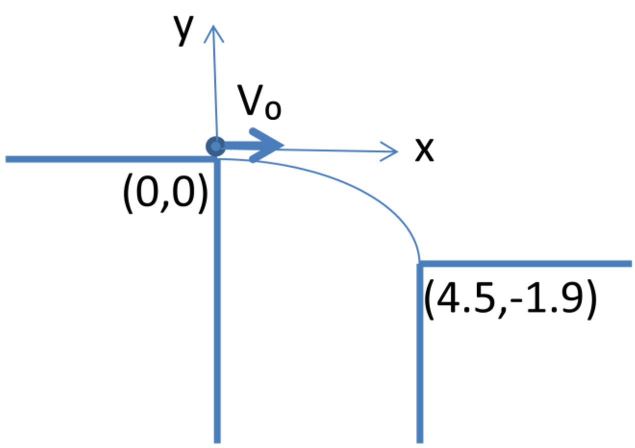


$$\vec{V} - \overrightarrow{V_0} = \vec{a}\,\Delta\,t$$

因為 $V - V_0$ 只是 V 和 V_0 長度的差，由左圖可知 $\vec{a}\,\Delta\,t$ 的大小還和 $\vec{V}$ 與 $\overrightarrow{V_0}$ 之間的夾角有關。所以兩者不相等。

25. 在電影追逐場景中，特技演員（替身）從平坦屋頂快跑再跳離開，接著落在下面 1.9ｍ 較低的另一個屋頂上，如果兩棟大樓之間的距離為 4.5ｍ 寬，則他要跑多快才能越過這個間距呢？

解:



$$x = V_0 t \qquad (1)$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$

由(2)人往下掉 1.9m 的時間

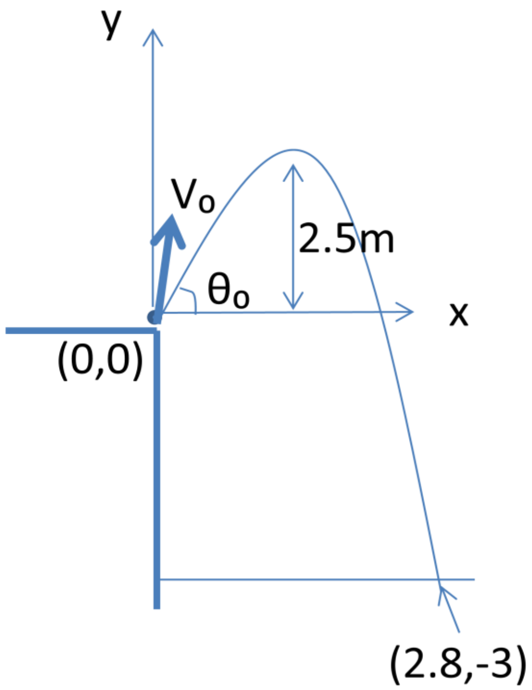
$$t = \sqrt{-\frac{2y}{g}} = \sqrt{-\frac{2\times(-1.9)}{9.8}} = 0.623\text{s}$$

人至少需在水平方向移動 4.5m

由(1) => $4.5 = V_0 \times 0.623 => V_0 = 7.2\ \text{m/s}$

31. 有一跳水員從 3.0 m 高的跳水板邊緣彈跳後到達板上方 2.5 m 的高度，接著落入距離板端的水平距離為 2.8 m 的水中，求跳水員離開跳水板之速率與角度各是多少？

解:



$$x = V_0 \cos\theta_0 t \qquad (1)$$

$$y = V_0 \sin\theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (2)$$

$$V_y{}^2 = V_{y0}{}^2 - 2g(y - y_0)$$

在最高點

$$0 = V_{y0}{}^2 - 2g(h - 0)$$

$$V_{y0} = V_0 \sin\theta_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 2.5}$$

$$= 7.0 \text{ m/s}$$

代入(2) => $y = 7t - 4.9t^2$

落水時 $\quad -3 = 7t - 4.9t^2$

$$\therefore t = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 + 4 \times 4.9 \times 3}}{2 \times 4.9} = 1.77\text{s} \text{ (落水時間)}$$

代入(1) =>

$$2.8 = V_0 \cos\theta_0 \times 1.77$$

$$\therefore V_{x0} = V_0 \cos\theta_0 = 1.58\ \mathrm{m/s}$$

$$V_0 = \sqrt{{V_{x0}}^2 + {V_{y0}}^2} = \sqrt{1.58^2 + 7^2} = 7.2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\theta_0 = \tan^{-1}\left(\frac{V_{y0}}{V_{x0}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{7}{1.58}\right) = 77.3^\circ$$